

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σχ. βιβλίο, σελ. 186 (στην έκδοση που έχουμε).

A2. Θεωρία, σχ. βιβλίο (ΘΕΤ), σελ. 76.

A3. Ορισμός, σχ. βιβλίο, σελ. 161.

A4. (α) Σ (β) Σ (γ) Λ (δ) Λ (ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 1, που είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού. Επίσης είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, με $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$. Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(1) = 0$. Οπότε

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow 2a = -12 \Leftrightarrow a = -6.$$

B2. Η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση 3^{ου} βαθμού άρα έχει το πολύ 3 ρίζες. Η f είναι συνεχής και παρατηρούμε ότι

$$f(0) = -3, f(1) = 1, f(2) = -1, f(4) = 1$$

Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano για την f σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[0, 1]$, $[1, 2]$ και $[2, 4]$. Άρα υπάρχουν ακριβώς τρεις θετικές ρίζες για την f .

B3. Η f' είναι πολυωνυμική και άρα είναι παραγωγίσιμη. Οπότε

$$f'(x) = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12 = 6(x - 2)$$

Είναι $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty, 2]$. Παρουσιάζει καμπή στο σημείο $(2, f(2) = -1)$.

B4. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi).$$

Τέμνει τον $y'y$ στο σημείο με τετμημένη $x = 0$. Οπότε για $x = 0$ έχουμε

$$y = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

Δηλαδή τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, f(\xi) - \xi f'(\xi))$.

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(\xi, g(\xi))$ έχει εξίσωση

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y - \xi - f(\xi) = (f'(\xi) + 1)(x - \xi)$$

Για $x = 0$ δίνει

$$y - \xi - f(\xi) = (f'(\xi) + 1)(-\xi) \Leftrightarrow y = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

Δηλαδή και η εφαπτομένη της C_g στο B τέμνει τον $y'y$ στο ίδιο σημείο με αυτή της C_f .

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Μελετάμε τη συνέχεια της f στο 0:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \eta \mu x) = 1 \cdot 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0 = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο 0. Για την παραγωγισιμότητα στο 0 έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cdot \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

Εφόσον τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, στο $(-\infty, 0)$ είναι γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και στο $(0, +\infty)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Από Γ1 έχουμε ότι είναι συνεχής και στο 0. Άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0$, διότι

$$|e^x \eta \mu x| = e^x |\eta \mu x| \leq e^x \Leftrightarrow 0 \leq |e^x \eta \mu x| \leq e^x$$

και $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Οπότε από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0$. Άρα η ευ-

θεία $y = 0$ (ο άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επίσης στο $+\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - x - \frac{1}{2} = 0,$$

έχει ρίζα στο $(-\pi, 0)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [-\pi, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

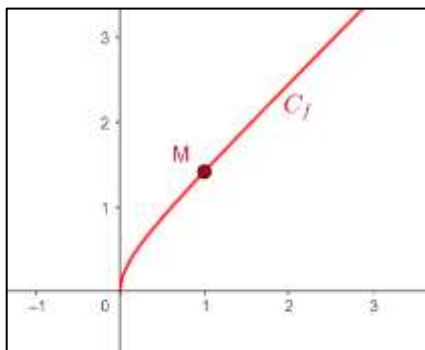
$$g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}.$$

Η g ως άθροισμα συνεχών είναι συνεχής. Επίσης

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= f(0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \\ g(-\pi) &= f(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(-\pi)g(0) < 0.$$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της g και άρα της εξίσωσης, στο $(-\pi, 0)$.

Γ4. Το σημείο M έχει συντεταγμένες $M(x, \sqrt{x^2 + x})$. Εφόσον το M κινείται οι συντε-



ταγμένες του είναι συναρτήσεις του χρόνου t . Δηλαδή $M(x(t), y(t))$. Ο ρυθμός μεταβολής τους είναι δίνεται από τις συναρτήσεις $x'(t)$ και $y'(t)$. Αναζητούμε χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x'(t_0) = y'(t_0)$. Οπότε

$$\begin{aligned} x'(t_0) = y'(t_0) &\Leftrightarrow x'(t_0) = \frac{2x(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \\ &\stackrel{x'(t_0) > 0}{\Leftrightarrow} 1 = \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \quad (\text{υψώνουμε στο τετράγωνο}) \\ &\Leftrightarrow 1 = \frac{4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1}{4x^2(t_0) + 4x(t_0)} \\ &\Leftrightarrow 1 = 0 \quad \text{Άτοπο.} \end{aligned}$$

Άρα δεν υπάρχει τέτοια χρονική στιγμή.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η g είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η συνάρτηση $x^{\ln x}$ είναι παραγωγίσιμη με

$$(x^{\ln x})' = (e^{\ln x \ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} (\ln^2 x)' = x^{\ln x} 2 \ln x (\ln x)' = \frac{2 \ln x}{x} x^{\ln x} = 2 \ln x x^{\ln x - 1}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g' είναι μηδενική στο $(0, +\infty)$. Είναι

$$g'(x) = \frac{F'(x)x^{\ln x} - 2F(x)\ln x x^{\ln x - 1}}{(x^{\ln x})^2} = x^{\ln x - 1} \frac{f(x)x - 2F(x)\ln x}{(x^{\ln x})^2} = 0$$

Άρα η g είναι σταθερή.

Δ2. i) Η δοσμένη σχέση για $x = 1$ δίνει $f(1) = 0$. Οπότε το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Εφόσον και οι δύο συναρτήσεις f και $\ln x$ είναι παραγωγίσιμες γύρω από το 1, εφαρμόζουμε κανόνα l' Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} (xf'(x)) = 1 \cdot f'(1) = 1 \cdot 2 = 2.$$

Εδώ λάβαμε υπόψιν ότι η ευθεία $y = 2x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ και άρα $f'(1) = 2$. Επίσης η f' είναι συνεχής διότι η δοσμένη σχέση μας δίνει

$$f(x) = \frac{2F(x)\ln x}{x} \Rightarrow \dots \Rightarrow f'(x) = \frac{2F(x)(2\ln^2 x - \ln x + 1)}{x^2} \quad (1)$$

Η συνάρτηση στο δεξί μέλος είναι πηλίκο συνεχών στο $(0, +\infty)$ και άρα είναι συνεχής.

ii) Από υπόθεση $f'(1) = 2$ και άρα η σχέση (1) για $x = 1$ δίνει

$$2 = 2F(1)(0 - 0 + 1) \Rightarrow F(1) = 1.$$

Από το Δ1 η g είναι σταθερή. Άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$g(x) = c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Leftrightarrow F(x) = c \cdot x^{\ln x}$$

Η τελευταία ισότητα για $x = 1$ δίνει $c = 1$ και άρα $F(x) = x^{\ln x}$.

Δ3. Η F είναι παραγωγίσιμη, με $F'(x) = 2 \ln x x^{\ln x - 1}$ (από Δ1). Είναι

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.

Η δοσμένη εξίσωση έχει προφανή ρίζα το 1. Για $x \neq 1$ έχουμε

- $x \in (0,1)$

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < x < 1 \stackrel{F\&}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x)$$

$$\Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$$

$$\Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 > -(x-1)^2$$

Οπότε η εξίσωση δεν έχει λύση στο $(0,1)$.

- $x \in (1, +\infty)$

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > x > 1 \stackrel{F\%}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 > -(x-1)^2$$

Οπότε η εξίσωση δεν έχει λύση και στο $(1, +\infty)$.

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το 1.

Δ4. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x+1$, με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 0$. Άρα στο $(0, +\infty)$ είναι

$$e^x > x+1 \Rightarrow e^{\ln^2 x} > \ln^2 x + 1 \Rightarrow x^{\ln x} > \ln^2 x + 1 \Rightarrow F(x) > \ln^2 x + 1 \quad (2)$$

Το εμβαδόν E του ζητουμένου χωρίου είναι ίσο με

$$E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx,$$

εφόσον η F είναι θετική. Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (2):

$$\begin{aligned} \int_1^e F(x) dx &> \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Rightarrow E > \int_1^e (x)' \ln^2 x dx + \int_1^e dx \\ &\Rightarrow E > \left[x \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e 2x \ln x \frac{1}{x} dx + e - 1 \\ &\Rightarrow E > e - 2 \int_1^e \ln x dx + e - 1 \\ &\Rightarrow E > e - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e + e - 1 \quad (\text{αφού } (x \ln x - x)' = \ln x) \\ &\Rightarrow E > e - 2(e - e + 1) + e - 1 \\ &\Rightarrow E > 2e - 3 \end{aligned}$$

Επιμέλεια θεμάτων

Βλαχοκυριάκος Κυριάκος, Μαθηματικός M.Sc.

Πετρόπουλος Βασίλης, Μαθηματικός Ph.D.

Τσιμπούρης Δημήτρης, Μαθηματικός