ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχ. βιβλίο (θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών), σελ. 76.

Α2. Θεωρία, σχ. βιβλίο (Ορισμός), σελ. 155.

Α3. Θεωρία, σχ. βιβλίο (Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού), σελ. 216.

Α4. (α) Σ (β) Σ (γ) Λ (δ) Λ (ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και r είναι αντίστοιχα τα σύνολα Α και Β, όπου

$$A = D_g \cap D_h - \{x \in \mathbb{R} : h(x) = 0\} = [1, +\infty) \cap [1, +\infty) - \{1\} = (1, +\infty)$$

(Είναι $h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$)

$$B = D_g \cap D_h = [1, +\infty) \cap [1, +\infty) = [1, +\infty)$$

Είναι

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$r(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}$$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)' = \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)' = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0,\ x \in (1, +\infty).$$

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα και συνεπώς 1–1. Δηλαδή, αντιστρέφεται. Για την f^{-1} έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x-1} = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = y - 1 \text{ (Εφόσον } x > 1 \text{ είναι } \frac{2}{x-1} > 0\text{, οπότε πρέπει } y > 1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{1}{y-1}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \frac{2}{y-1}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{2}{y-1}$$

Άρα $f^{-1}(x)=1+\dfrac{2}{x-1}$, $x>1$. Άρα $f=f^{-1}$.

B3. Ψάχνουμε για πλάγια ασύμπτωτη στο +∞.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{r(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(r(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$$

Οπότε η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της r στο +∞.

B4. Η εξίσωση έχει σύνολο ορισμού το (1, +∞). Οπότε

$$\left[f^{-1}(f(x))\right]^2=1+4r(x)\Leftrightarrow x^2=1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2=1+4x-\frac{4}{x}$$
$$\Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0$$
$$\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)-4\left(x^2-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)(x-4)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ απορ.},\ x=1 \text{ απορ.},\ x=4 \text{ (μοναδικήλύση)}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και άρα είναι συνεχής στο 2. Οπότε

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to2^-}\left(-2x+4+e^{\lambda}\right)=\lim_{x\to2^+}\left(-x^2+4x-3+\lambda\right)$$
$$\Rightarrow -4+4+e^{\lambda}=-4+8-3+\lambda$$
$$\Rightarrow e^{\lambda}=\lambda+1$$
$$\Rightarrow \lambda=0$$

Εφόσον η ισότητα $e^x=x+1$ ισχύει μόνον για x = 0. Η f γράφεται

$$f(x)=\begin{cases}-2x+5, & 0\le x<2\\ -x^2+4x-3, & x\ge 2\end{cases}$$

Γ2. Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο [0, 2) με $f'(x)=-2$. Εφόσον είναι συνεχής στο [0,2] είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό. Επίσης είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, στο (2, +∞) με $f'(x)=-2x+4$. Για x > 2 είναι

$$-2x<-4\Leftrightarrow -2x+4<0.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (2, +∞). Εφόσον η f είναι συνεχής στο 2 είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Στο x = 0 η f παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) το $f(0)=5$.

Γ3. (i) Η f είναι συνεχής στο [0, 3] και παραγωγίσιμη στο $[0,2)\cup(2,3]$. Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της f στο x = 2. Είναι

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)^2}{x-2}=0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2 και συνεπώς δεν ισχύει το ΘΜΤ στο [0, 3].

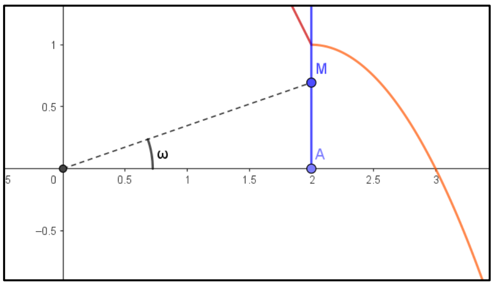
(ii) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Δ και Ε έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{-5}{3}.$$

Για $x\in[0,2)$ είναι $f'(x)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2=-\frac{5}{3}$. Αδύνατη

Για x > 2 είναι $f'(x)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2x+4=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2x=-\frac{17}{3}\Leftrightarrow x=\frac{17}{6}\in(2,3)$. Άρα $\xi=\frac{17}{6}$.

Γ4.



Έστω M(2, y) σημείο της ευθείας x = 2. Η εφαπτομένη της γωνίας ω δίνεται από τον τύπο

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{AM}{OA}=\frac{y}{2}.$$

Όμως το σημείο Μ κινείται και άρα οι συντεταγμένες του είναι συναρτήσεις του χρόνου. Δηλ. $M(2,y(t))$.

Οπότε η εφαπτομένη της ω γίνεται $\varepsilon\varphi\,\omega(t)=\frac{y(t)}{2}$ (1). Παραγωγίζοντας και τα 2 μέλη έχουμε

$$(\varepsilon\varphi\,\omega(t))'=\left(\frac{y(t)}{2}\right)'\Rightarrow\frac{\omega'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}=\frac{y'(t)}{2}\Rightarrow\omega'(t)\cdot\left(\varepsilon\varphi^2\omega(t)+1\right)=\frac{0{,}5}{2}$$

$$\Rightarrow\omega'(t)\cdot\left(\varepsilon\varphi^2\omega(t)+1\right)=\frac{1}{4}\quad(2)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από τη γραφική παράσταση της f έχουμε $y(t_0)=f(2)=1$. Οπότε η σχέση (1) δίνει $\varepsilon\varphi\,\omega(t_0)=\frac{1}{2}$. Τότε η σχέση (2) γίνεται

$$\omega'(t_0)\cdot\left(\varepsilon\varphi^2\omega(t_0)+1\right)=\frac{1}{4}\Rightarrow\omega'(t_0)\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right)=\frac{1}{4}\Rightarrow\omega'(t_0)=\frac{1}{5}\ \text{rad/sec}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f γράφεται $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\alpha$. Είναι παραγωγίσιμη, ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Είναι $f'(x)=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow x=e$. Επίσης $f'(x)>0\Rightarrow 1-\ln x>0\Rightarrow \ln x<1\Rightarrow x<e$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, e] και γνησίως φθίνουσα στο [e, +∞). Παρουσιάζει στο x = e μέγιστο (ολικό) το $f(e)=1+\frac{1}{e}$. Οπότε

$$f(e)=1+\frac{1}{e}\Rightarrow \frac{\ln e}{e}+\alpha=1+\frac{1}{e}\Rightarrow \alpha=1.$$

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ και

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+1=2\ln 2^{-1}+1=-\ln 4+\ln e=\ln\frac{e}{4}<0,\ \text{εφόσον}\ \frac{e}{4}<1.$$

$$f(1)=\frac{\ln 1}{1}+1=0+1=1>0.$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα x_0 στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$. Εφόσον $\left(\frac{1}{2},1\right)\subseteq(0,e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$ και συνεπώς η ρίζα x_0 είναι μοναδική. Οπότε στο διάστημα $(0,e]$ η f έχει μοναδική ρίζα που βρίσκεται στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Ελέγχουμε αν υπάρχει ρίζα της f στο διάστημα $[e,+\infty)$. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+1\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{Dl'H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+1=1$$

Είναι συνεχής στο $[e,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα. Άρα

$$f([e,+\infty))=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(e)\right]=\left(1,1+\frac{1}{e}\right].$$

Εφόσον $0 \notin \left(1, 1+\frac{1}{e}\right]$ η ρίζα x_0 της f είναι μοναδική.

Δ3. (i) Είναι $f(2) = \frac{\ln 2}{2} + 1$ και $f(4) = \frac{\ln 4}{4} + 1 = \frac{2\ln 2}{4} + 1 = \frac{\ln 2}{2} + 1 = f(2)$. Στο $(0, e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και άρα είναι 1–1. Οπότε

$$f(x) = f(4) \Leftrightarrow f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2 .$$

Στο $[e, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα είναι 1–1. Οπότε

$$f(x) = f(4) \Leftrightarrow x = 4 .$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει λύσεις τους 2 και 4.

(ii) Η ανισότητα στο διάστημα $(0, +\infty)$, ισοδύναμα, γράφεται

$$2^x \le x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \le 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} \le \frac{\ln x}{x} \text{ (x και ln2 είναι θετικά)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} + 1 \le \frac{\ln x}{x} + 1 \Leftrightarrow f(2) \le f(x)$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

Αν $x \in (0, e]$, τότε $f(x) \ge f(2) \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} x \ge 2 \Rightarrow x \in [2, e]$.

Αν $x \in (e, +\infty)$, τότε $f(x) \ge f(2) \Rightarrow f(x) \ge f(4) \overset{f \searrow}{\Rightarrow} x \le 4 \Rightarrow x \in (e, 4]$.

Συνεπώς, $f(x) \ge f(2) \Leftrightarrow x \in [2, 4]$.

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)|dx = \int_{-\ln 2}^{0} \left| f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} \right| dx = \int_{-\ln 2}^{0} |f(e^x)| \cdot \frac{1-x}{e^x} dx .$$

Εφόσον 1 – x > 0 στο διάστημα [–ln2, 0]. Θέτουμε $e^x = u \Rightarrow x = \ln u \Rightarrow dx = \frac{1}{u}du$. Επίσης

$$x = -\ln 2 \Rightarrow e^x = e^{-\ln 2} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad x = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow u = 1$$

Οπότε

$$E = \int_{1/2}^{1} |f(u)| \cdot \frac{1-\ln u}{u} \cdot \frac{1}{u} du = \int_{1/2}^{1} |f(u)| \cdot \frac{1-\ln u}{u^2} du = \int_{1/2}^{1} |f(u)| \cdot f'(u) du .$$

Στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ η f είναι γν. αύξουσα και μηδενίζεται στο $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Συνεπώς

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0 .$$

Άρα

$$\begin{aligned}
E &= \int_{1/2}^{x_0} -f(u)f'(u)\,du + \int_{x_0}^{1} f(u)f'(u)\,du \\
&= -\frac{1}{2}\int_{1/2}^{x_0} 2f(u)f'(u)\,du + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{1} 2f(u)f'(u)\,du \\
&= -\frac{1}{2}\int_{1/2}^{x_0} \left(f^2(u)\right)'\,du + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{1} \left(f^2(u)\right)'\,du \\
&= -\frac{1}{2}\left[f^2(u)\right]_{1/2}^{x_0} + \frac{1}{2}\left[f^2(u)\right]_{x_0}^{1} \\
&= -\frac{1}{2}\left(f^2(x_0) - f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(f^2(1) - f^2(x_0)\right) \\
&= \frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f^2(1) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{e}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Επιμέλεια θεμάτων

Πετρόπουλος Βασίλης – Μαθηματικός Ph. D.

Τσιμπούρης Δημήτρης – Μαθηματικός