ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΛ 2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχ. Βιβλίο σελ. 186.

Α2. Θεωρία, σχ. Βιβλίο σελ. 142.

Α3. Θεωρία, σχ. Βιβλίο σελ. 161.

Α4. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $h = f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$\left\{x \in D_g : g(x) \in D_f\right\}.$$

Είναι

$$\left.\begin{array}{l} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ g(x) \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in [0,1]$$

Άρα $D_h = [0,1]$. Ο τύπος της h είναι

$$h(x) = f\left(g(x)\right) = \left(\sqrt{x}\right)^4 - 2\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Β2. Έστω $x_1 x_2 \in [0,1]$, με $x_1 \neq x_2$. Τότε

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 1 \neq x_2 - 1 \overset{x \in [0,1]}{\Rightarrow} (x_1-1)^2 \neq (x_2-1)^2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2).$$

Άρα η h είναι 1–1 και συνεπώς αντιστρέφεται. Για τον τύπο της αντίστροφης έχουμε

$$\begin{aligned} h(x) = y &\Leftrightarrow (x-1)^2 = y \quad (y \geq 0) \\ &\Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{y} \\ &\Leftrightarrow 1 - x = \sqrt{y} \quad (\text{εφόσον } 0 \leq x \leq 1) \\ &\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y} \end{aligned}$$

Είναι $x \in [0,1]$ και άρα $0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq 1$. Οπότε η h^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και τύπο $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$.

Β3. (i) Πρέπει η φ να είναι συνεχής στο $[0,1]$. Εφόσον είναι συνεχής στο $[0,1)$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, ελέγχουμε τη συνέχεια στο 1. Είναι

$$\lim_{x \to 1} \frac{h^{-1}(x)}{1-x} = \lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\left(\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$$

Άρα η φ είναι συνεχής, προφανώς είναι μη σταθερή και $\varphi(0)=1\neq\varphi(1)=\frac{1}{2}$. Άρα ισχύει το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών για την φ στο $[0,1]$.

(ii) Είναι

$$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\overset{\eta\mu x\nearrow}{\Rightarrow}\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1.$$

Εφόσον η φ παίρνει όλες τις τιμές, ανάμεσα στο $\frac{1}{2}$ και το 1, υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εύκολο βλέπουμε ότι

$$f(x)=\begin{cases}-2x+\alpha, & x<-1\\ \gamma, & x=-1\\ x^3-x+\beta, & x>-1\end{cases}$$

Η f είναι συνεχής και άρα είναι συνεχής και στο -1. Οπότε

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)\Leftrightarrow 2+\alpha=\beta=\gamma$$

Εφόσον η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή, είναι $f(0)=0$, Οπότε $f(0)=0\Leftrightarrow\beta=0=\gamma$ και $\alpha=-2$. Άρα

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\leq-1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$$

Γ2. Έστω $A(x_0,x_0^3-x_0)$ το σημείο επαφής. Τότε η εφαπτομένη (ε) στο Α έχει εξίσωση

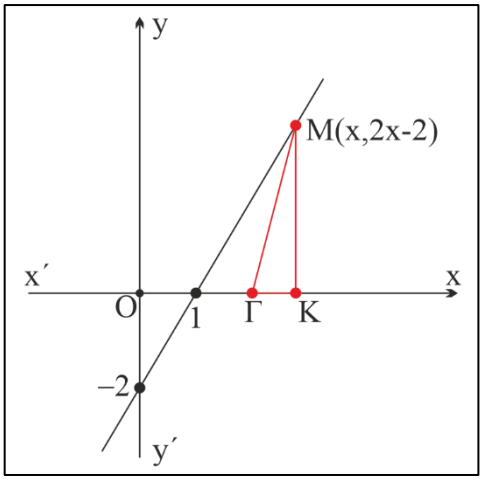
$$(\varepsilon):\ y-x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(x-x_0)$$

Εφόσον διέρχεται από το $(0,-2)$ έχουμε

$$-2-x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(-x_0)\Leftrightarrow 2x_0^3-2=0\Leftrightarrow x_0=1.$$

Συνεπώς η εξίσωση της (ε) είναι $y=2x-2$.

Γ3. Έστω $M(x,2x-2)$ σημείο της (ε), με $x>2$. Εφόσον το Μ κινείται οι συντεταγμένες του είναι συναρτήσεις του χρόνου t. Οπότε $M(x(t),2x(t)-2)$



Το τρίγωνο ΜΚΓ έχει εμβαδόν

$$E=\frac{1}{2}(\Gamma K)(MK)=\frac{1}{2}(x-2)(2x-2)=x^2-3x+2$$

Εφόσον μεταβάλλεται είναι συνάρτηση του χρόνου

$$E(t)=x^2(t)-3x(t)+2\,.$$

Ο ρυθμός μεταβολής του είναι

$$E'(t)=2x(t)x'(t)-3x'(t)+2\,.$$

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το Μ διέρχεται από το σημείο $B(3,4)$ είναι $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$. Συνεπώς για $t=t_0$ ο ρυθμός μεταβολής είναι

$$E'(t_0)=2x(t_0)x'(t_0)-3x'(t_0)+2=6\ \mu ov^2/s\,.$$

Γ4. Για το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$ παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right|=\frac{|\eta\mu f(x)|}{|f(x)|}\le\frac{1}{|f(x)|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|f(x)|}\le\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\le\frac{1}{|f(x)|}$$

Εφόσον $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-2x-2}=0$, από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$.

Επίσης

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}\overset{-x>0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+x}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1-x)(x+1)}{(1-x)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{x^2+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

Τελικά

$$\lim_{x\to-\infty}=\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=0+1=1\,.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$. Είναι $f'(x)\ge0\Leftrightarrow x\ge1$. Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) στο $x=1$, το $f(1)=1-\ln3<0$. Για την f ισχύουν

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \ldots = +\infty .$$

Άρα η f έχει μοναδική ρίζα $x_1 \in (0,1)$ και μοναδική ρίζα $x_2 \in (1,+\infty)$.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx .$$

Εφόσον η f είναι αρνητική στο (x_1, x_2) έχουμε

$$\begin{aligned}
E &= \int_{x_1}^{x_2} -f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln 3x - x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \ln 3x\,dx - \int_{x_1}^{x_2} x\,dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} (x)' \ln 3x\,dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} \\
&= \left[x\ln 3x\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx - \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} \\
&= x_2 \ln 3x_2 - x_1 \ln 3x_1 - (x_2 - x_1) - \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} \quad (\text{είναι } x_2 = \ln 3x_2 \text{ και } x_1 = \ln 3x_1) \\
&= x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) - \frac{(x_2 - x_1)(x_1 + x_2)}{2} \\
&= \frac{2(x_2 - x_1)(x_1 + x_2) - 2(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1)(x_1 + x_2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(2x_1 + 2x_2 - 2 - x_1 - x_2) \\
&= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)
\end{aligned}$$

Δ3. Η ανισότητα, ισοδύναμα, γράφεται

$$f(2 - x_1) < 0 \Leftrightarrow f(2 - x_1) < f(x_2).$$

Εφόσον $x_1 < 1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και συνεπώς,

$$f(2 - x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0 ,$$

που ισχύει, διότι $E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$. Άρα και $x_1 + x_2 - 2 > 0$.

Συνεπώς, ισχύει και η δοσμένη ανισότητα.

Δ4. Η εξίσωση, ισοδύναμα, γράφεται

$$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow f(x) - f'(x_2)(x - x_2) = 1 - \ln 3 - f(x)$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $(x_2, f(x_2) = 0)$ έχει εξίσωση

$$y = f'(x_2)(x - x_2).$$

Εφόσον η f είναι κυρτή, για κάθε $x \in (0,+\infty)$, ισχύει

$$f(x) \geq f'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow f(x) - f'(x_2)(x-x_2) \geq 0 .$$

Η ισότητα ισχύει μόνον για $x = x_2$. Επίσης,

$$f(x) \geq 1 - \ln 3 \Leftrightarrow 1 - \ln 3 - f(x) \leq 0 .$$

Το ίσον ισχύει μόνον για x = 1. Η εξίσωση

$$f(x) - f'(x_2)(x-x_2) = 1 - \ln 3 - f(x)$$

έχει ρίζα αν και μόνον αν γίνουν ίσα με το μηδέν τα δύο της μέλη. Εφόσον αυτό δεν πραγματοποιείται για την ίδια τιμή του x, η εξίσωση είναι αδύνατη.

Επιμέλεια θεμάτων
Βλαχοκυριάκος Κυριάκος, Μαθηματικός M.Sc.
Κιρκή Ελένη, Μαθηματικός M.Sc.
Πετρόπουλος Βασίλης, Μαθηματικός Ph.D.
Τσιμπούρης Δημήτρης, Μαθηματικός