

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΑΛ 2022

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 28-29

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 87

A3. α. Λ β. Σ γ. Λ

A4. α. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ β. $(f \circ g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β

B1. Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{25+10+5+20+15}{5} = \frac{75}{5} = 15.$$

Για το εύρος έχουμε $R = 25 - 5 = 20$.

B2. Για την διακύμανση s^2 έχουμε

$$s^2 = \frac{(25-15)^2 + (10-15)^2 + (5-15)^2 + (20-15)^2 + (15-15)^2}{5} = \frac{250}{5} = 50.$$

B3. Για τον συντελεστή μεταβολής έχουμε

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{\sqrt{50}}{15} = \frac{5\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{10}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{2}{9} > \frac{1}{100} \Leftrightarrow 200 > 9,$$

που ισχύει. Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f'(x) = 3x^2 - 18x + \alpha$. Πρέπει

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 18 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 15.$$

Γ2. Για $\alpha = 15$ είναι

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1 \text{ και } f'(x) = 3x^2 - 18x + 15.$$

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας. Πρέπει:

$$\lambda = f(2) = 13 - 36 + 15 = -9.$$

Και

$$f(2) = \lambda \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 3 = -9 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 21.$$

Επομένως η ευθεία έχει εξίσωση $y = -9x + 21$.

Γ3. Είναι

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2 - 6x + 5) = 3(x-1)(x-5).$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-
f(x)		T.M.		T.E.	

Επομένως:

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 5]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[5, +\infty)$.

Παρουσιάζει τ.μ. στο 1 το $f(1) = 8$ και τ.ε. στο 5 το $f(5) = -24$.

Γ4. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-5)}{x+1} = \frac{3 \cdot (-4)}{2} = -6.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, επομένως $A = \mathbb{R} - \{-1\}$. Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Δ2. Επειδή, $f'(2) = \frac{1}{9}$ και $f'(1) = \frac{1}{4}$, έχουμε

$$\bar{x} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9 \text{ και } s = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2.$$

Δ3. Στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + s) = (5, 11)$ βρίσκεται το $68 + \frac{95-68}{2} = 81,5\%$ των παρατηρήσεων. Επομένως

$$2000 \frac{81,5}{100} = 1630 \text{ μαθητές.}$$

Πάνω από $\bar{x} + 3s = 15$ βρίσκεται το $\frac{100 - 99,7}{2} = 0,15\%$ των παρατηρήσεων, επομένως

$$2000 \frac{0,15}{100} = 3 \text{ μαθητές.}$$

Δ4. Αν y_i είναι οι νέες παρατηρήσεις, ισχύει $y_i = x_i + 3$ και $s_y = s_x$ οπότε:

$$\bar{y} = \bar{x} + 3 = 9 + 3 = 12 \text{ και } s_y = 2.$$

Τα θέματα επιμελήθηκαν οι μαθηματικοί

Βλαχοκυριάκος Κυριάκος, M.Sc.

Πετρόπουλος Βασίλης, Ph.D.

Τσιμπούρης Δημήτρης



ΠΕΡΙ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ