

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 135.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 51.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 23.

Α4. α) Σ, β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ ΒΒ1. Θέτουμε $w = x + 1 \Leftrightarrow x = w - 1$, οπότε

$$f(w-1) = (w-1+1)e^{-(w-1)} = we^{1-w}.$$

Άρα ο τύπος της f είναι $f(x) = xe^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη, με

$$f'(x) = (xe^{1-x})' = e^{1-x}(1-x)$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		1 Μεγ.	

Η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γν. φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Παρουσιάζει μέγιστο στο $x=1$ το $f(1)=1$.

Β3. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με

$$f''(x) = (e^{1-x}(1-x))' = e^{1-x}(x-2)$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$		$2e^{-1}$ Σ.Κ.	

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$. Το σημείο $(2, 2e^{-1})$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Στο $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$$

Άρα δεν υπάρχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Στο $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0 = \lambda \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ (ο άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. (i) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{1-x}) = -\infty$. Εφόσον η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της

C_f στο $+\infty$, είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Με τη βοήθεια του B2 ερωτήματος και εφόσον η f είναι συ-

νεχής έχουμε

$$f(\mathbb{R}) = f((-\infty, 1]) \cup f([1, +\infty)) = (-\infty, 1] \cup (0, 1] = (-\infty, 1]$$

(ii) Η εξίσωση $f(x) = \lambda$ για

- $\lambda \leq 0$ έχει μοναδική ρίζα.
- $0 < \lambda < 1$ έχει δύο ρίζες
- $\lambda = 1$ έχει μοναδική ρίζα
- $\lambda > 1$ είναι αδύνατη

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική και είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ ως τριγωνομετρική. Για το $x = 0$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο 0 και συνεπώς είναι συνεχής.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική και είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ ως

τριγωνομετρική. Στο $x = 0$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη στο } x = 0$$

Γ2. (i) Είναι $f(0) = 1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$. Άρα δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(ii) Στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \sin \xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \pi$.

Γ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(x) \neq 0$ στο $(-\infty, 0)$. Είναι $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$, διακρίνουμε $\Delta = 12(3+a) < 0$. Εφόσον ο συντελεστής του x^2 είναι αρνητικός το τριώνυμο $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

Γ4. Στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ είναι $f(x) = \sin x \geq -1$. Στο $(-\infty, 0)$ είναι $f'(x) < 0$ και εφόσον η f είναι συνεχής στο $x = 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$. Συνεπώς $f(x) \geq f(0) = 1 \geq -1$. Άρα για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$ είναι $f(x) \geq -1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εξίσωση, για κάθε ισοδύναμα, γράφεται

$$\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \ln x - 1 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $s: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $s(x) = x \ln x - 1$. Η s είναι συνεχής στο $[1, e]$ και

$$\left. \begin{array}{l} s(1) = -1 \\ s(e) = e - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow s(1)s(e) < 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $s(x_0) = 0$. Δηλαδή

$$\ln x_0 = \frac{1}{x_0} \quad (1)$$

Η μοναδικότητα της ρίζας δικαιολογείται από την μονοτονία της s , η οποία είναι γνησίως αύξουσα, διότι $s'(x) = \ln x + 1 > 0$ για κάθε $x \in (1, e)$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη, με

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{xx_0}$$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		Ελαχ.	

Η f παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) στο $x = x_0$, το

$$f(x_0) = \ln x_0 (x_0 + 1) - \frac{1}{x_0} - 1 = \frac{1}{x_0} (x_0 + 1) - \frac{1}{x_0} - 1 = 0.$$

Δ3. Αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση $g(x) = h(x)$ έχει μοναδική λύση.

$$\begin{aligned} g(x) = h(x) &\Leftrightarrow x e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e} \right)^{x+1} \\ &\Leftrightarrow x e^{-x} = \frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}} \\ &\Leftrightarrow e x = x_0^{x+1} \\ &\Leftrightarrow \ln(xe) = \ln(x_0^{x+1}) \\ &\Leftrightarrow \ln x + 1 = (x+1) \ln x_0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \\ &\Leftrightarrow x = x_0 \quad (\text{Λόγω } \Delta 2) \end{aligned}$$

Άρα οι C_g, C_h τέμνονται μόνον στο σημείο $K(x_0, x_0 e^{-x_0})$. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο K αρκεί να αποδείξουμε ότι $g'(x_0) = h'(x_0)$. Είναι

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-x} (1-x), \text{ οπότε } g'(x_0) = \frac{1-x_0}{e^{x_0}} \\ h'(x) &= \left(\left(\frac{x_0}{e} \right)^{x+1} \right)' = \left(\frac{x_0}{e} \right)^{x+1} \ln \frac{x_0}{e} = \left(\frac{x_0}{e} \right)^{x+1} (\ln x_0 - 1) = \left(\frac{x_0}{e} \right)^{x+1} \left(\frac{1}{x_0} - 1 \right) = \frac{x_0^x}{e^{x+1}} (1-x_0) \end{aligned}$$

Από το Δ1 έχουμε

$$\ln x_0 = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow \ln x_0^{x_0} = \ln e \Leftrightarrow x_0^{x_0} = e.$$

Οπότε

$$h'(x_0) = \frac{x_0^{x_0}}{e^{x_0+1}} (1-x_0) = \frac{e}{e^{x_0+1}} (1-x_0) = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

Δηλαδή, $g'(x_0) = h'(x_0)$.

Δ4. Έστω d η συνάρτηση που δίνει την απόσταση των σημείων A και B . Εφόσον $f(x) > g(x)$ για κάθε $x > 0$ είναι \

$$d(x) = f(x) - g(x).$$

Η d είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $d(x) \geq d(x_0)$, για κάθε $x > 0$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Η f να μην είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Εφόσον είναι εσωτερικό σημείο του $(x_0, +\infty)$ είναι κρίσιμο σημείο για την f .

(β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Τότε είναι παραγωγίσιμη και η d στο x_0 . Εφόσον παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 και το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της d , από θεώρημα Fermat έχουμε ότι $d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν το x_0 είναι κρίσιμο σημείο για τη συνάρτηση f .

Επιμέλεια θεμάτων

Βλαχοκυριάκος Κυριάκος, Μαθηματικός M.Sc.

Κιρκή Ελένη, Μαθηματικός M.Sc.

Πετρόπουλος Βασίλης, Μαθηματικός Ph.D.

Τσιμπούρης Δημήτρης, Μαθηματικός

ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ