

Μαθηματικά 2020 – Παλαιό Σύστημα**Απαντήσεις****Θέμα Α****A1.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 111**A2.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 104**A3.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 74**A4.** (α) Ψευδής(β) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^{2v+1}} \right)$ δεν υπάρχει.**A5.** (α) Σωστό (β) Λάθος (γ) Λάθος**Θέμα Β****B1.** Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-3} = \frac{3x_2+1}{x_2-3} \Leftrightarrow (3x_1+1)(x_2-3) = (3x_2+1)(x_1-3)$$

$$\Leftrightarrow 3x_1x_2 - 9x_1 + x_2 - 3 = 3x_1x_2 - 9x_2 + x_1 - 3 \Leftrightarrow -10x_1 = -10x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Συνεπώς η f είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.**B2.** Υπολογίζουμε την αντίστροφη. Έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-3} = y \Leftrightarrow 3x+1 = yx-3y \Leftrightarrow x(y-3) = 3y+1$$

Για $y \neq 3$, η παραπάνω σχέση γράφεται $x = \frac{3y+1}{y-3}$, με $x \neq 3 \Leftrightarrow 3y+1 \neq 3y-9$. Συνεπώς,

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}, \forall x \neq 3$$

Άρα $f = f^{-1}$.**B3.** Για κάθε $x \neq 3$, έχουμε

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) \Rightarrow (f \circ f)(x) = x$$

B4. Έστω $g(x) = f(x) \eta \mu \frac{1}{3x+1}$, $x \neq -\frac{1}{3}$. Έχουμε:

$$|g(x)| = \left| f(x) \eta \mu \frac{1}{3x+1} \right| = |f(x)| \cdot \left| \eta \mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq |f(x)| \Leftrightarrow |g(x)| \leq |f(x)|$$

Άρα $-|f(x)| \leq g(x) \leq |f(x)| \Leftrightarrow -\left|\frac{3x+1}{x-3}\right| \leq g(x) \leq \left|\frac{3x+1}{x-3}\right|$ με $\lim_{x \rightarrow -1/3} f(x) = 0$. Από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow -1/3} g(x) = 0$.

Θέμα Γ

Γ1. Το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από το τύπο $E = \frac{1}{2}(B\Gamma) \cdot (AM)$. Αρκεί να υπολογίσουμε τα τμήματα $B\Gamma$ και AM .

Από το ορθογώνιο τρίγωνο OBM έχουμε $\eta\mu\theta = \frac{BM}{OB} = BM$. Συνεπώς $B\Gamma = 2BM = 2\eta\mu\theta$.

Επιπλέον, $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OM}{OB} = OM$, συνεπώς $AM = AO + OM = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$.

Επομένως $E(\theta) = \eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in (0, \pi)$.

Γ2. Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη με πρώτη παράγωγο

$$E'(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) - \eta\mu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1.$$

Η ρίζα της πρώτης παραγώγου είναι η $\frac{\pi}{3}$, αφού

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\theta = -1 \\ \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \theta \in (0, \pi).$$

Από το πίνακα των μεταβολών της E ,

x	0	$\pi/3$	π
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$		O.M.	

βλέπουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο (ολικό) στο $\theta = \frac{\pi}{3}$, το $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Συνεπώς

η τιμή της γωνίας για την οποία μεγιστοποιείται το εμβαδόν του τριγώνου είναι $\frac{\pi}{3}$.

Γ3. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της E . Στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύ-

ξουσα, συνεπώς $E\left(\left(0, \frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) = \Delta_1$. Αντίστοιχα, στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$, είναι γνησίως

φθίνουσα, επομένως $E\left(\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)\right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) = \Delta_2$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\frac{3}{4}$ ανήκει και στα δυο διαστήματα Δ_1, Δ_2 , συνεπώς θα υπάρξει αριθμός $\theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\theta_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ τέτοια ώστε $E(\theta_1) = E(\theta_2) = \frac{3}{4}$.

Γ4. Η συνάρτηση E ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$. Άρα θα υπάρχουν ξ_1, ξ_2 , με $\xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$ τέτοια ώστε

$$E'(\xi_1) = \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \Rightarrow E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) \quad (1)$$

και

$$E'(\xi_2) = \frac{E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \Rightarrow E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2) \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2).$$

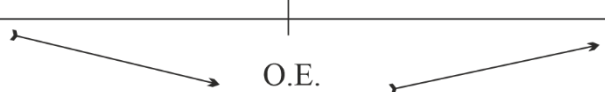
Θέμα Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (0, +\infty)$, με πρώτη παράγωγο

$f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$ και $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$. Προφανής ρίζα της πρώτης παραγώγου είναι ο αριθμός 1, συνεπώς $f'(1) = 0$. Η δεύτερη παράγωγος είναι θετική, συνεπώς η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έχουμε:

$$x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$$

$$x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

Από τον πίνακα μεταβολών τη συνάρτησης, παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) στο $x = 1$ το $f(1) = -\ln \lambda$. Από τη τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι η ευθεία πάνω στην οποία

κινείται το σημείο ακροτάτου της f είναι η $x=1$ καθώς τη μεταβλητή λ διατρέχει το θετικό ημιάξονα.

Δ2. Έχουμε,

$$x^x \geq \lambda x \Rightarrow x \ln x - \ln(\lambda x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0.$$

Επιπλέον, από το ερώτημα **Δ1**, ισχύει ότι $f(x) \geq -\ln \lambda$, συνεπώς $-\ln \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$.

Δ3. Έστω $(x_0, g(x_0))$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$(\varepsilon): y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$$

Το σημείο $O(0,0)$ ανήκει στην (ε) , συνεπώς η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$g(x_0) = x_0 \cdot g'(x_0) \quad (1)$$

Επιπλέον, η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη, οπότε

$$g(x) = x^x \Leftrightarrow \ln g(x) = x \ln x \Rightarrow \frac{1}{g(x)} g'(x) = \ln x + 1.$$

Για $x = x_0$ και λόγω της (1) η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\frac{g'(x_0)}{g(x_0)} = \ln x_0 + 1 \Rightarrow x_0 = \ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 = x_0 - 1,$$

η οποία αληθεύει μόνο για τη τιμή $x_0 = 1$.

Δ4. (i) Για $x > 0$ η συνάρτηση h είναι συνεχής και γράφεται $h(x) = e^{x \ln x}$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1 = h(0)$.

(ii) Έστω $\varphi(x) = x^{2020} \left(3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt, x \in [0,1]$. Η συνάρτηση φ είναι συ-

νεχής στο $[0,1]$, με $\varphi(0) = \int_0^1 h(1-t) dt = I_1$ και $\varphi(1) = 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt = I_2$.

Θέτουμε $1-t = u \Rightarrow dt = -du$. Οπότε $1-t = u \Rightarrow dt = -du$, με άκρα ολοκλήρωσης

$$t=0 \Rightarrow u=1 \text{ και } t=1 \Rightarrow u=0.$$

Το ολοκλήρωμα με τη παραπάνω αντικατάσταση γίνεται:

$$I_1 = - \int_1^0 h(u) du = \int_0^1 h(u) du > 0, \text{ αφού } h(x) > 0.$$

Η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g . Επειδή

$$g''(x) = (g(x) \ln(x+1))' = \dots = g(x) \left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right] > 0,$$

στο διάστημα $(0, +\infty)$ η C_g βρίσκεται πάνω από την (ε) , άρα στο $(0, +\infty)$ ισχύει $g(x) \geq x$, με την ισότητα να αληθεύει για $x = 1$. Οπότε

$$\int_1^2 g(x) dx > \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \int_1^2 g(x) dx > \frac{3}{2} \Rightarrow 3 - 2 \int_1^2 g(x) dx < 0 \Rightarrow \varphi(1) < 0$$

Η φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano και συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$.

Τα θέματα επιμελήθηκαν οι

Βλαχοκυριάκος Κυριάκος – Μαθηματικός M.Sc.

Πετρόπουλος Βασίλης – Μαθηματικός Ph.D.

Τσιμπούρης Δημήτρης – Μαθηματικός



ΠΕΡΙ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ