ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΛ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέμα Α

Α1. α) Θεωρία, σχολικό βιβλίο, σελ. 15.

β) i. Θεωρία, σχολικό βιβλίο, σελ. 35.

ii. Θεωρία, σχολικό βιβλίο, σελ. 35.

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο, σελ. 142.

Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο, σελ. 135.

Α4. α) Λάθος

Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -2, & x<0\end{cases}$$

Είναι $f'(x)=0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και η f δεν είναι σταθερή.

β) Λάθος

Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 3, & x=1\end{cases}$$

Είναι

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

Ενώ, $f(1)=3$.

Α5. Σωστή απάντηση είναι η **γ**.

Θέμα Β

Β1. Εφόσον η ευθεία y = 2 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2.$$

Β2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $g(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2$. Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και είναι

$$g(2)=e^{-2}>0 \quad \text{και} \quad g(3)=e^{-3}-1<0.$$

Άρα, από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα ρ για την g στο $(2,3)$. Η g είναι παραγωγίσιμη, ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$g'(x)=\left(e^{-x}-x+2\right)'=-e^{-x}-1<0\,,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα, η g είναι γνησίως φθίνουσα και συνεπώς η ρίζα της είναι μοναδική. Οπότε η δοσμένη εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο $(2,3)$.

Β3. Η f είναι παραγωγίσιμη, με

$$f'(x)=-e^{-x}<0\,,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς είναι 1–1. Άρα, αντιστρέφεται. Για την αντίστροφη της f έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x)=y &\Leftrightarrow e^{-x}+2=y\\ &\Leftrightarrow e^{-x}=y-2 \quad (\text{Πρέπει } y-2>0\Rightarrow y>2)\\ &\Leftrightarrow -x=\ell n(y-2)\\ &\Leftrightarrow x=-\ell n(y-2),\quad y>2 \end{aligned}$$

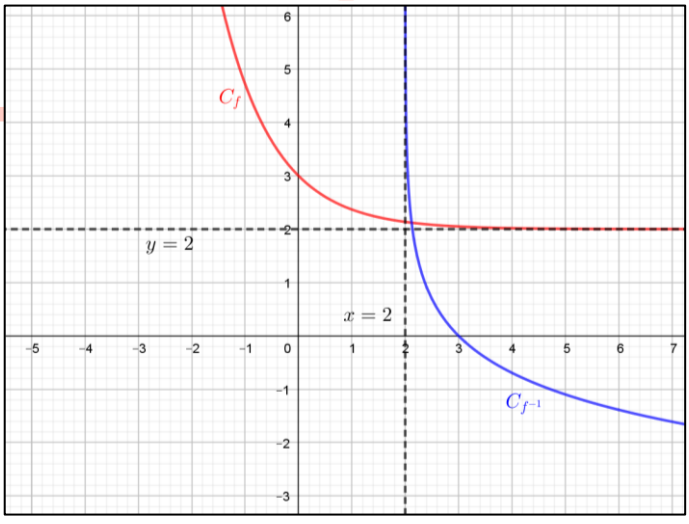
Συνεπώς η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση $f^{-1}:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο

$$f^{-1}(x)=-\ell n(x-2).$$

Β4. Για κατακόρυφη ασύμπτωτη ψάχνουμε στο άκρο 2 του πεδίου ορισμού:

$$\lim_{x\to 2} f^{-1}(x)=\lim_{x\to 2}\left(-\ell n(x-2)\right)=-(-\infty)=+\infty.$$

Άρα, η ευθεία x = 2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f^{-1}.



Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h_1, με τύπο $h_1(x)=e^{-x}$, 2 μονάδες προς "τα πάνω". Ενώ η γραφική παράσταση της f^{-1} προκύπτει σε πρώτη φάση από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h_2, με $h_2(x)=\ell nx$, 2 μονάδες προς "τα δεξιά" και κατόπιν γράφουμε την συμμετρική της h_2 ως προς τον άξονα $x'x$. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

Θέμα Γ

Γ1. Η f ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής, οπότε

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}\left(x^2+\alpha\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(e^{x-1}+\beta x\right) \Rightarrow \alpha+1 = 1+\beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

Από την παραγωγισιμότητα της f στο 1 έχουμε

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} + \lim_{x\to 1^-} \frac{\beta(x-1)}{x-1} = 1+\beta$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$

Συνεπώς,

$$\beta+1 = 2 \Rightarrow \beta = 1 = \alpha\,.$$

Γ2. Είναι

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 1 \\ e^{x-1}+x, & x < 1 \end{cases}$$

Στο $(1,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη, με $f'(x) = 2x > 0$ και άρα είναι γνησίως αύξουσα.

Στο $(-\infty,1)$ η f είναι παραγωγίσιμη, με $f'(x) = e^{x-1}+1 > 0$ και άρα είναι γνησίως αύξουσα.

Εφόσον η f είναι συνεχής στο 1, είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον είναι συνεχής και άρα το σύνολο τιμών της είναι το

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right).$$

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right) = 0+(-\infty) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right) = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Γ3. i) Εφόσον $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ η f μηδενίζεται τουλάχιστον μία φορά. Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε η ρίζα της είναι μοναδική.

Είναι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(e^{x-1}+x\right) = e^{-1} > 0$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right) = -\infty$. Οπότε

$$f\left((-\infty,0)\right) = \left(-\infty, e^{-1}\right)$$

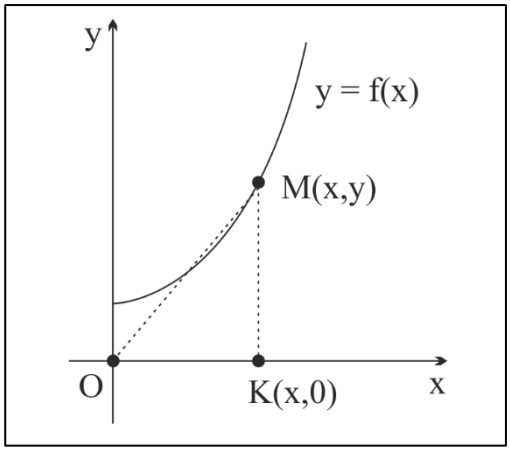
Είναι $0 \in \left(-\infty, e^{-1}\right)$ και συνεπώς η ρίζα x_0 είναι αρνητική.

ii) Για $x > x_0$ είναι

$$f(x) > 0,\ f^2(x) > 0 \ \text{και}\ -x_0 > 0\,.$$

Άρα $f^2(x) - x_0 f(x) > 0$.

Γ4.



Το σημείο Μ κινείται, άρα οι συντεταγμένες του είναι συναρτήσεις του χρόνου t. Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΟΚΜ ισούται με:

$$(OKM)=\frac{1}{2}(OK)(KM)=\frac{1}{2}|x|\cdot|x^2+1|=\frac{1}{2}(x^3+x).$$

Εφόσον το x είναι συνάρτηση του χρόνου t, είναι και το εμβαδόν συνάρτηση του t. Άρα

$$E(t)=\frac{1}{2}(x^3(t)+x(t)).$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι

$$E(t)=\frac{1}{2}(3x^2(t)x'(t)+x'(t)).$$

Τη χρονική στιγμή $t=t_0$ κατά την οποία το Μ διέρχεται από το Α είναι

$$x(t_0)=3 \text{ και } x'(t_0)=2.$$

Άρα

$$E(t_0)=\frac{1}{2}(3x^2(t_0)x'(t_0)+x'(t_0))=28 \ \mu.\mu./s.$$

Θέμα Δ

Δ1. Από το σημείο Α έχουμε ότι:

$$f(1)=1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=1 \ (1)$$

Η παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$f'(x)=\ell n(x^2-2x+2)+(x-1)\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha \Rightarrow f'(1)=-1 \Leftrightarrow \alpha=-1.$$

Επομένως, $(1)\Rightarrow \beta=2$.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με:

$$\int_1^2 |f(x)-(-x+2)|dx.$$

Είναι

$$g(x)=f(x)-(-x+2)=(x-1)\ell n(x^2-2x+2)\geq 0, \text{ για κάθε } x\in[1,2],$$

εφόσον $x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 1$. Άρα

$$E=\int_1^2 (x-1)\ln(x^2-2x+2)dx$$

Περί Επιστημών

Θέτουμε $x^2-2x+2=u$, άρα $2(x-1)dx=du \Rightarrow (x-1)dx=\frac{1}{2}du$. Τα άκρα παραμένουν τα ίδια.

Οπότε:

$$E=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2 (u\ln u-u)' du=\frac{1}{2}[u\ln u-u]_1^2=\frac{1}{2}(2\ln 2-2+1)=\frac{1}{2}(2\ln 2-1).$$

Δ3. i. Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ell n(x^2-2x+2)+(x-1)\frac{2x-2}{x^2-2x+2}-1 \\ &= \ell n(x^2-2x+2)+2\frac{x^2-2x+2-1}{x^2-2x+2}-1 \\ &= \ell n(x^2-2x+2)+2-2\frac{1}{x^2-2x+2}-1 \\ &= \ell n(x^2-2x+2)-2\frac{1}{x^2-2x+2}+1 \end{aligned}$$

Άρα:

$$f''(x)=\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}+2\frac{2(x-1)}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}(x^2-2x+4)$$

Είναι $f'(1)=-1$. Ο πίνακας των μεταβολών είναι:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↘	Ελαχ.	↗		↗	

ii. Εφαρμόζω το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ αφού:

- Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}\geq -1$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}\Rightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Rightarrow$$
$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq(\lambda-1)\ell n\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Rightarrow$$
$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ell n\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}$$

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη, με

$$g'(x)=3x^2-1\leq-1.$$

Παρατηρούμε ότι $g'(0)=-1$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο $(0,g(0))$ έχει εξίσωση

$$y-g(0)=g'(0)x\Leftrightarrow y=-x+2.$$

Άρα, η ευθεία $y=-x+2$ είναι κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των f και g στα σημεία $A(1,1)$ και $B(0,2)$ αντίστοιχα. Για κάθε $x\neq1$ είναι $f'(x)>-1$ και για κάθε $x\neq0$ είναι $g'(x)<-1$ δεν υπάρχει άλλη κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των f και g.

περί επιστημών

Τα θέματα επιμελήθηκαν οι:
Βλαχοκυριάκος Κυριάκος, Μαθηματικός M. Sc.
Κιρκή Ελένη, Μαθηματικός M. Sc.
Μάρκου Μαρία, Μαθηματικός M. Sc.
Πετρόπουλος Βασίλης, Μαθηματικός Ph. D.
Τσιμπούρης Δημήτρης, Μαθηματικός