

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΠΑΛ 2019
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ 1°

A1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο, σελ. 28.

A2. α. Θεωρία, σχολικό βιβλίο, σελ. 59.

β. Θεωρία, σχολικό βιβλίο, σελ. 59.

A3. α. Λ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ 2°

B1. Είναι

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \Rightarrow |\bar{x}| = \frac{\sqrt{s^2}}{CV} \Rightarrow |\bar{x}| = \frac{\sqrt{4}}{0,2} \Rightarrow |\bar{x}| = \frac{2}{0,2} \Rightarrow |\bar{x}| = 10 \Rightarrow \bar{x} = \pm 10.$$

Όμως, όλες οι τιμές του δείγματος είναι θετικές και συνεπώς $\bar{x} > 0$. Άρα $\bar{x} = 10$.

B2. Είναι

$$\bar{x} = 10 \Rightarrow \frac{1}{6}(11+7+\kappa+13+11+10) = 10 \Rightarrow 52 + \kappa = 60 \Rightarrow \kappa = 60 - 52 \Rightarrow \kappa = 8.$$

B3. Διατάσσουμε τις τιμές σε αύξουσα σειρά:

$$7, 8, 10, 11, 11, 13.$$

Η διάμεσος, εφόσον το πλήθος των τιμών είναι άρτιο, ισούται με το ημιάθροισμα των δύο κεντρικών τιμών, δηλαδή

$$\delta = \frac{10+11}{2} = \frac{21}{2} = 10,5.$$

Για το εύρος έχουμε

$$R = 13 - 7 = 6.$$

B4. Αν με $x_i, i=1, \dots, 6$ συμβολίσουμε τις δοσμένες τιμές, τότε για τις νέες τιμές $y_i, i=1, \dots, 6$ που προκύπτουν ισχύει

$$y_i = x_i - 2, i=1, \dots, 6.$$

Οπότε, έχουν μέση τιμή $\bar{y} = \bar{x} - 2 = 10 - 2 = 8$ και τυπική απόκλιση $s_y = s = 2$. Συνεπώς, ο νέος συντελεστής μεταβλητότητας γίνεται

$$CV_y = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 > 0,1.$$

Άρα το νέο δείγμα τιμών δεν είναι ομοιογενές.

Θέμα 3^ο**Γ1.** Είναι

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 2x + 10} \right)' = \frac{(x^2 - 2x + 10)'}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}.$$

Γ2. Έχουμε

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)		0	
f(x)		Ελαχ.	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Παρουσιάζει, ελάχιστο

στο $x = 1$, το $f(1) = \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 10} = \sqrt{9} = 3$. Συνεπώς, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) \geq 3.$$

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, στο $M(5, f(5))$ είναι

$$y = f'(5)x + \beta.$$

Είναι

$$f(5) = \sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 + 10} = \sqrt{25 - 10 + 10} = \sqrt{25} = 5$$

$$f'(5) = \frac{5-1}{\sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 + 10}} = \frac{4}{5}$$

Η εξίσωση, γίνεται

$$y = \frac{4}{5}x + \beta.$$

Εφόσον διέρχεται από το σημείο $M(5, 5)$ έχουμε

$$5 = \frac{4}{5} \cdot 5 + \beta \Rightarrow 5 = 4 + \beta \Rightarrow \beta = 1.$$

Άρα η εφαπτομένη στο M έχει εξίσωση

$$y = \frac{4}{5}x + 1.$$

Γ4. Για το A:

Στην εξίσωση της εφαπτομένης θέτουμε $y = 0$ και έχουμε

$$0 = \frac{4}{5}x + 1 \Rightarrow \frac{4}{5}x = -1 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}.$$

Άρα $A\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$.

Για το B:

Είναι γνωστό ότι η ευθεία $y = \frac{4}{5}x + 1$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,1)$.

Θέμα 4^ο

Δ1. Για $\lambda = 3$ έχουμε

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x.$$

Οπότε,

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 > 0, \text{ για } x \neq 1.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

Είναι $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ και $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$. Άρα, $\frac{3}{8} < \frac{5}{6}$. Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $f\left(\frac{3}{8}\right) < f\left(\frac{5}{6}\right)$.

Δ2. Για $\lambda = 3$ είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{x(\sqrt{x}-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(\sqrt{x}+1)}{x} = \frac{3 \cdot 2}{1} = 6 \end{aligned}$$

Δ3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο τυχαίο σημείο της $M(x, f(x))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης το $f'(x) = 3(x-1)^2$. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = 6(x-1).$$

Είναι

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	+
$f'(x)$	Ελαχ.		

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f γίνεται ελάχιστος στο σημείο $K(1, f(1))$, δηλαδή στο $K(1, 1)$.

Δ4. Η f δεν έχει ακρότατα όταν η f' δεν αλλάζει πρόσημο. Επειδή η f' είναι τριώνυμο 2^{ου} βαθμού, πρέπει να έχει διακρίνουσα $\Delta \leq 0$. Οπότε

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 36 - 12\lambda \leq 0 \Rightarrow -12\lambda \leq -36 \Rightarrow \lambda \geq 3.$$

Συνεπώς, η μικρότερη τιμή του λ για την οποία η f δεν παρουσιάζει ακρότατο είναι το 3.

ΠΕΡΙ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Επιμέλεια θεμάτων

Βλαχοκυριάκος Κοριάκος, Μαθηματικός M.Sc.

Πετρόπουλος Βασίλης, Μαθηματικός Ph.D.